Systèmes d'équations linéaires (SEL)

Un SEL de m équations et n inconnues est une collection d'équations linéaires aux inconnues $x_1, \dots x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

avec a_{ij} (les coefficients) et b_i (les seconds membres) des nombres réels, pour tout $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$.

Théorème ($0 - 1 - \infty$)

Un SEL admet soit...

1. *aucune solution (système incompatible)*
2. *une unique solution (système compatible)*
3. *une infinité de solutions (système compatible)*

Systèmes linéaires : matrice augmentée et opérations élémentaires

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Les opérations élémentaires **sur les lignes**

1. Permuter deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Multiplier une ligne par un réel (non-nul) $L_i \to \lambda \cdot L_i$
3. Additionner un multiple réel d'une ligne à une autre ligne $L_i \to L_i + \lambda \cdot L_j$

But : mettre la matrice augmentée sous forme échelonnée réduire pour faire apparaître la (les) solution(s) si elles existent.

Matrices échelonnées

Matrice échelonnée :

$$\begin{pmatrix} \color{red}{*} & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & \color{red}{*} & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \color{red}{*} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{blue}{0} & * & \cdots & \color{blue}{0} & * & * \\ 0 & \color{red}{1} & * & \cdots & \color{blue}{0} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \color{red}{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les "*" et "1" sont des **pivots**.

Ils occupent une **position-pivot** dans une **colonne-pivot**.

Matrices échelonnées

Nous avons vus trois cas en exemple :

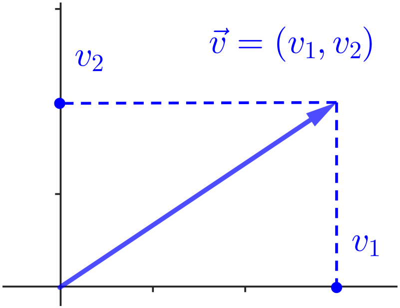
1. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow (s_1, s_2) = (1, 1)$. Les "1" sont des **pivots**.
2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$ pas de solution ! $(0 = 1)$ Pivot dans la "colonne du second membre".
3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow$ infinité de solutions.

Les pivots donnent des **variables principales**, les autres donnent des **variables libres (paramètres)**.

Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Nous regardons une collection de valeurs de n nombres réels $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sous la forme d'une matrice à une colonne. On l'appelle un **vecteur de** $\mathbb{R}^n$, et se représente graphiquement par une flêche

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \text{ avec } v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$$



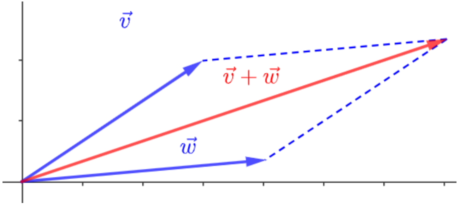
Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Nous pouvons définir des opérations de bases :

1. **Egalité** : $\vec{v} = \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad v_i = w_i, \ \forall i = 1, \ldots, n.$

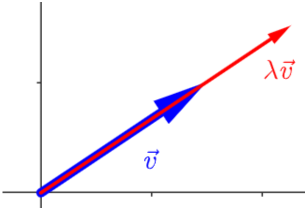
2. **Addition**

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$



3. **Multiplication par un scalaire**

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot v_n \end{pmatrix}$$



Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Les opérations addition et multiplication scalaire permettent de définir d'autres concepts naturels :

- **Vecteur nul de** $\mathbb{R}^n$: $0_{\mathbb{R}^n} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- **L'inverse de** $\vec{v}$: $-\vec{v} \overset{\text{def}}{=} (-1)\vec{v}$

... et des propriétés algébriques :

EV 1 - $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

EV 2 - $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

EV 3 - $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$

EV 4 - $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$

EV 5 - $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$

EV 6 - $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

EV 7 - $0_{\mathbb{R}^n} + \vec{v} = \vec{v}$

EV 8 - $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Autre propriétés élémentaires :

$$0 \cdot \vec{v} = \lambda \cdot 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Combinaisons linéaires

Soient $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$. Le vecteur

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots \lambda_n \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$$

est une **combinaison linéaire (CL) de** $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k\}$.

On note

$$\mathrm{span}\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k\} \quad \text{(on note aussi “Vect” au lieu de “span”)}$$

l'ensemble des CL de $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k\}$.

Question : comment déterminer si un vecteur $\vec{v} \in \mathrm{span}\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$?

Lien avec les systèmes linéaires

Théorème (1.14)

Soient $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Trouver les coefficients $x_1, \ldots, x_n$ *tels que*

$$x_1\vec{a}_1 + \ldots x_n\vec{a}_n = \vec{b} \qquad (\text{équation vectorielle})$$

est équivalent à *résoudre le SEL associé à la matrice augmentée*

$$(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n | \vec{b}) = (A|\vec{b}) = B.$$

Autrement dit,

$$\vec{b} \in span\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n | \vec{b}) \text{ est compatible.}$$

Critère des pivots par ligne

Théorème (1.15)

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$.

Tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ *est une CL de* $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$

si et seulement si *la matrice* $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ *admet une forme échelonnée avec* ***1 pivot par ligne***.

On dit alors que $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ ***engendrent*** $\mathbb{R}^m$ *et on note*

$$span\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m.$$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \end{array}\right)$ est compatible

pour tout $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \end{array}\right)$ n'est pas compatible

pour tout $\vec{b} = (b_1, b_2)$ (slt si $b_2 = 0$)

Forme matricielle

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \implies \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\implies A\vec{x} = \vec{b}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = 7b_1 - 3b_2 - 10b_3 \\ x_2 = -4b_1 + 2b_2 + 7b_3 \\ x_3 = -2b_1 + b_2 + 3b_3 \end{cases}$$

Théorème (1.18)

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet au moins une solution $x \in \mathbb{R}^n$ (système compatible).
2. $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m,\ b \in \text{span}\{\text{colonnes de A}\}$.
3. $\mathbb{R}^m = \text{span}\{\text{colonnes de A}\}$.
4. La forme échelonnée réduite de A admet au moins 1 pivot par ligne.

La condition "1 pivot par ligne" est nécessaire, car elle évite des lignes nulles qui peuvent rendre le système incompatible.

Indépendance linéaire

Une famille de vecteurs $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k\}$ est **linéairement indépendante** (ou **libre**) si aucun de ses vecteur est une combinaison linéaire des autres. Dans le cas contraire, on dit que la famille est **liée**.

Théorème

$\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k\}$ *est libre si et seulement si*

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k = 0_{\mathbb{R}^n} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i = 0, \ \forall 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Autrement dit, l'unique solution du système matriciel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_k & 0_{\mathbb{R}^n} \end{array} \right)$$

est le vecteur nul.

Indépendance linéaire

Théorème d'équivalence des pivots par colonnes

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. L'équation $A\vec{x} = 0_{\mathbb{R}^m}$ admet comme **unique** solution le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$.
2. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
3. La forme échelonnée réduite de A admet au moins 1 pivot par colonne.

La condition "1 pivot par colonne" est nécessaire, car elle évite des variables libres nulles qui donnent une infinité de solutions.

Représentation des solutions d'un SEL

Tous système compatible $A\vec{x} = \vec{b}$ admet un ensemble de solutions de la forme

$$\mathcal{S} = \vec{p} + \text{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$$

où

- $\vec{p}$ est une solution particulière du système non-homogène $A\vec{x} = \vec{b}$
- $\text{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ est l'ensemble des solutions du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.

L'ensemble $\text{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ (que nous verrons plus tard somme un *sous-espace vectoriel* appelé *noyau de A*) correspond (dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) à une droite ou un plan passant par l'origine. L'addition par $\vec{p}$ correspond à une *translation*.